数理解析研究所講究録
177巻 1973年 1-13

Connesについて

奈良工専　　北川 誠之助

§1 序

ここでは、A. Connes の $T(M)$ に関する結果の一部を紹介します

記号：M, N ： Neumann algebra

φ, ψ ： M 上の normal semi-finite faithful weight（又は state） 以下では weight（又は state）は全て normal semi-finite faithful なものとする

$\mathfrak{N}_\varphi = \{x \in M : \varphi(x^*x) < \infty\}$

$\mathfrak{M}_\varphi = \{x^*y : x, y \in \mathfrak{N}_\varphi\}$

σ_t^φ : φ による modular automorphism

$M_\varphi = \{x : \sigma_t^\varphi(x) = x\}$

§2

<u>定理 1</u>　φ, ψ : M 上の weight

$\exists\, t \longmapsto u_t \in M_u$: strongly conti. mapping

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \qquad \forall x \in M$$

証明　　$F_2 = \{2\times 2\text{-matrix}\}$ とする

$\theta(\sum x_{ij}\otimes e_{ij}) \stackrel{def}{=} \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22})$　　　$\sum x_{ij}\otimes e_{ij} \in (M\otimes F_2)_+$

$\mathfrak{m}_\theta \ni \sum x_{ij}\otimes e_{ij} \iff x_{i1}\in \mathfrak{m}_\varphi,\ x_{i2}\in\mathfrak{m}_\psi$ $(i=1,2)$ より

θ が $M\otimes F_2$ の weight になる事は容易にわかる。

$f_j = 1\otimes e_{jj}$ $(j=1,2)$ が $(M\otimes F_2)_\theta$ に含まれることを示す。

すなわち $\sigma_t^\theta(f_j)=f_j$ $(j=1,2)$ を示す.

[1] により次の事を示せば十分である。

$f_j\,\mathfrak{m}_\theta \subset \mathfrak{m}_\theta$,　$\mathfrak{m}_\theta\cdot f_j \in \mathfrak{m}_\theta$　$(j=1,2)$

$\theta(f_j\cdot a) = \theta(a\cdot f_j)$　　$\forall a\in\mathfrak{m}_\theta$ $(j=1,2)$

いずれも、容易に計算できるので、計算は省略する。

$\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sum x_{ij}\otimes e_{ij}$ とすると

$(1\otimes e_{11})\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x\otimes e_{11})(1\otimes e_{11})$

$0 = (1\otimes e_{22})\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x\otimes e_{11})(1\otimes e_{22})$

より $^\exists\sigma_t(x)\in M$　　$\sigma_t^\theta(x\otimes e_{11}) = \sigma_t(x)\otimes e_{11}$ となる

$x \longrightarrow \sigma_t(x) =$ strongly conti. one-parameter group of automorphisms in M.

$x\longrightarrow\sigma_t(x)$ に関して、φ の K.M.S. 条件を満足することを示す。

$\varphi(\sigma_t(x^*x)) = \theta(\sigma_t^\theta(x^*x)\otimes e_{11}) = \theta(x^*x\otimes e_{11}) = \varphi(x^*x)$ ~~$\otimes e_{11}$~~.

$\forall a, b\in\mathfrak{m}_\varphi$

$\varphi(\sigma_t(a)b) = \theta(\sigma_t(a)b\otimes e_{11}) = \theta(\sigma_t^\theta(a\otimes e_{11})\cdot b\otimes e_{11})$

$\varphi(b\,\sigma_t(a)) = \theta(b\otimes e_{11}\cdot \sigma_t^{\theta}(a\otimes e_{11}))$

σ_t^{θ} が θ に関する K.M.S 条件を満たすことより

$^{\exists}F(z)$ = bdd analytic $0<\mathrm{Im}\,z<1$, & conti $0\le \mathrm{Im}\,z\le 1$

$F(t)=\theta(\sigma_t^{\theta}(a\otimes e_{11})\,b\otimes e_{11}) = \varphi(\sigma_t(a)\,b)$

$F(t+i)=\theta(b\otimes e_{11}\cdot \sigma_t(a\otimes e_{11}))=\varphi(b\,\sigma_t(a))$

したがって K.M.S 条件の一意性により

$$\sigma_t(x)=\sigma_t^{\varphi}(x) \qquad \forall x\in M.$$

$$\therefore\ \sigma_t^{\theta}(x\otimes e_{11})=\sigma_t(x)\otimes e_{11}=\sigma_t^{\varphi}(x)\otimes e_{11}$$

同様に $\sigma_t^{\theta}(x\otimes e_{22})=\sigma_t^{\psi}(x)\otimes e_{22}$ $\quad \forall x\in M.$

$$(1\otimes e_{22})\,\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{21})=\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{21})=\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{21})(1\otimes e_{11})$$

$$0=(1\otimes e_{11})\,\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{21})=\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{21})\,1\otimes e_{22}$$

より $\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{21})=u_t\otimes e_{21}$ $\quad u_t\in M.$ となり

$$u_t^*u_t\otimes e_{11}=\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{11})=1\otimes e_{11}$$

$u_tu_t^*\otimes e_{22}=\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{22})=1\otimes e_{22}$ より. u_t は unitary operator.

$$(u_t\otimes e_{21})(\sigma_t^{\varphi}(x)\otimes e_{11})(u_t^*\otimes e_{12})=\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{21})\,\sigma_t^{\theta}(x\otimes e_{11})\,\sigma_t^{\theta}(1\otimes e_{12})$$

$$=\sigma_t^{\theta}(x\otimes e_{22})=\sigma_t^{\psi}(x)\otimes e_{22}$$

$\therefore\ u_t\,\sigma_t^{\varphi}(x)\,u_t^*=\sigma_t^{\psi}(x) \qquad \forall x\in M.$ $\qquad$ q.e.d

定理1で求めた u_t を $(D\psi:D\varphi)_t$ と書く.

$(D\psi,D\varphi)_t$ は次の様な性質を持つ.

Lemma 1) $\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \psi$: weight

i) $(D\varphi_1:D\varphi_2)_t\,(D\varphi_2:D\varphi_3)_t=(D\varphi_1:D\varphi_3)_t$.

ii) $\psi=\sigma_t^{\varphi}$ - invariant weight

[1] より $\exists h\ \eta\ M^{\varphi}\quad h\geq 0$

$\psi(x)=\varphi(hx)$ と表わされるが

$(D\psi : D\varphi)_t = h^{it}$ となる.

iii) $u\in M_u \qquad \varphi_u \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(uxu^*)$

$\sigma_t^{\varphi}(u) = u\,(D\varphi_u : D\varphi)_t$

(ア) iv) $(D\psi : D\varphi)_{t_1+t_2} = (D\psi : D\varphi)_{t_1}\,\sigma_{t_1}^{\varphi}((D\psi : D\varphi)_{t_2})$

証明はいずれも簡単に計算出来るので、略する。

今度は、逆に $(D\psi : D\varphi)_t$ は(ア)により characterization される事を示す。

<u>定理2</u> $t \longrightarrow u_t \in M_u$: strongly conti mapping

(ア)を満たす すなわす $u_{t_1+t_2} = u_{t_1}\sigma_{t_1}^{\varphi}(u_{t_2})$ ならば

$\exists_1\ \psi$: weight s.t. $(D\psi : D\varphi)_t = u_t$

証明[~~first~~ step I] $F_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} B(L^2(R^1))$ [1] により、次の事が解かっている。

$\exists\omega$ = weight on F_∞ s.t. $\sigma_t^{\omega}(x) = U_t x U_t^*$ $(U_t f)(s) = f(s-t)$ $\forall f\in L^2(R)$

$\bar{\omega} \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi\otimes\omega$: weight on ~~$F_\infty\otimes M$~~ $M\otimes F_\infty$

$\exists V\in (M\otimes F_\infty)_u$ s.t. $u_t\otimes 1 = V\sigma_t^{\bar{\omega}}(V^*)$ なる事を示す。

$I : \mathfrak{H}_\varphi\otimes L^2(R^1) \ni \xi\otimes f \longrightarrow f(t)\xi \in L^2(R, \mathfrak{H}_\varphi)$

により、$\mathfrak{H} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{H}_\varphi\otimes L^2(R^1)$ と $L^2(R, \mathfrak{H}_\varphi)$ を同一視する

$$W : L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_\varphi) \ni \xi_t \longrightarrow \pi_\varphi(u_t)\xi_t \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_\varphi)$$

W = unitary operator で $I^{-1}WI \in \pi(M \otimes F_\infty)$ なる事は容易に解かる。

$^\exists V$: unitary $\in M \otimes F_\infty$ s.t. $(\pi_\varphi \otimes 1)(V) = I^{-1}WI$

V が求めるものであることは、容易に計算出来る。

[step II] i) $\Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \overline{\omega}(V^* x V)$ = weight on $M \otimes F_\infty$

$\sigma_t^\Phi(x \otimes y) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \otimes \sigma_t^\omega(y) \quad \forall x \in M, \forall y \in F_\infty$

ii) $a \in F_\infty$, $a > 0$ $\omega(a) < \infty$ とする

$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \Phi(x \otimes a) \quad x \in M_+$ とすると.

ψ = weight on M

証明 i) lemma 1より

$$\sigma_t^\Phi(x \otimes y) = V \sigma_t^{\overline{\omega}}(V^*) \sigma_t^{\overline{\omega}}(x \otimes y) \sigma_t^{\overline{\omega}}(V) V^* = (u_t \otimes 1)\sigma_t^{\overline{\omega}}(x \otimes y)(u_t^* \otimes 1)$$
$$= (u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*) \otimes \sigma_t^\omega(y)$$

ii) $^\forall x \in M_+$. $\varphi(x) < \infty$

$b \overset{\text{def}}{=} \int f(t) u_t dt$ とすると $\psi(b x b^*) < \infty$ なる事を示す.

但し. $f \in L^1$ $\hat{f} \in C_0$

$$\psi(b x b^*) = \overline{\omega}(V^*(b x b^* \otimes a)V) = \overline{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1)V)$$

[1] により

$\overline{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1)V) < \infty$ を示すには.

$V^*(b \otimes 1)$ が $\sigma_t^{\overline{\omega}}$- analytic を示せば十分.

$$V^* \int f(t)(u_t \otimes 1) dt = V^* \int f(t) V \sigma_t^{\overline{\omega}}(V^*) dt = \int f(t) \sigma_t^{\overline{\omega}}(V^*) dt.$$

$\therefore\ \hat{f} \in \mathcal{C}_0$ より $\qquad V^*(b \otimes 1)$ は $\sigma_t^{\tilde{\omega}}$- analytic

$\eta_{\varphi b} \subset \eta_\psi$ で. $f \in L^1$. $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$ を動かすから

$$\eta_\psi = \text{weakly dense}$$

$\therefore\ \psi$ - semi-finite.

ψ normal, faithful なことは明らかだから.

ψ は M の上の weight.

step III). M, N: Neumann algebras

$\Phi =$ weight on $M \otimes N$ として.

$$\sigma_t^{\Phi}(M \otimes 1) = M \otimes 1$$

$a \in N_+ \quad \psi(x) \overset{\text{def}}{=} \Phi(x \otimes a)$ が weight on M とすると

$$\sigma_t^{\psi}(x) \otimes 1 = \sigma_t^{\Phi}(x \otimes 1) \qquad \forall x \in M$$

証明.

Lemma 2 $\quad \mathbb{C} \ni z \longrightarrow x(z) \in M$: analytic

φ : weight on M.

$\exists x \in M$: ~~analytic~~ σ_t - analytic.

$$\sigma_z(x) = x(z)$$

$\Longleftarrow \quad$ i) $\forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0$ s.t

$$|\mathrm{Im}\, z| < r_1 \quad a \in \mathfrak{M}_\varphi^+ \Rightarrow \varphi(x(z)\, a\, x(z)^*) \le r_2\, \varphi(a)$$

$$\varphi(x^*(\bar{z})\, a\, x(\bar{z})^*) \le r_2\, \varphi(a)$$

ii) $\forall a \in \mathfrak{M}_\varphi^+ \quad \left.\begin{array}{l} z \longrightarrow \varphi(x(z)\, a) \\ z \longrightarrow \varphi(a\, x(z)) \end{array}\right\}$ holomorphic

$\varphi(x(z+i)a) = \varphi(ax(z))$

Lemmaの証明は了% する

$\sigma_t(x)\otimes 1 \overset{def}{=} \sigma_t^{\Phi}(x\otimes 1)$ $\forall x\in M$ $\sigma_t(x)$は strongly conti one-parameter group of automorphisms

$\{\int f(t)\sigma_t^{\Phi}(x\otimes 1)\,dt : {}^{\forall}x\in M, f\in L', \hat{f}\in C_0\}$: weakly dense in $M\otimes 1$

より $\{\sigma_t$- analytic element$\}$は weakly dense in M.

$\{\sigma_t$- analytic element$\}\ni {}^{\forall}x$

$x \longrightarrow \sigma_z(x)$ は Lemma 2) を満たすから

$\sigma_t(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$ ア. $\{\sigma_t$- analytic element$\}$ weakly dense

より $\sigma_t(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$ $\forall x\in M$.

Step IV) 以上の事をまとめると

$\exists\Phi$ $\sigma_t^{\Phi}(x) = u_t\,\sigma_t^{\varphi}(x)\,u_t^*$

$(D\psi : D\varphi)_t = V_t$ $a_t = u_t V_t^* \in$ center of M_φ

$a_{t_1+t_2} = a_{t_1}\cdot a_{t_2}$ より

${}^{\exists}h\in M$ center of M $a_t = h^{it}$ $h\geq 0$

Lemma 1 より $(D\psi(h,\ ), D\psi) = h^{it} = a_t$

$\therefore (D\psi(h,\ ) : D\varphi) = (D\psi(h,\ ) : D\psi)(D\psi : D\varphi) = h^{it}\cdot V_t$

$= a_t V_t = u_t$. q.e.d.

§3. Def $T(M) = \{T_0 \in R : {}^\exists\varphi \quad {}^\exists\sigma_{T_0}^{\varphi} \equiv 1\}$

<u>定理 3</u> i) $T_0 \in T(M)$

ii) ${}^\forall\varphi \quad \sigma_{T_0}^{\varphi}$: inner

iii) ${}^\forall\varphi \Rightarrow {}^\exists u$ = unitary $\in$ center of M_φ s.t $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x) = uxu^*$

iv) ${}^\forall\varphi, \ {}^\exists\psi$ s.t $\psi(x) = \varphi(h.x)$

但し. h: center of M_φ, $h \geq 0$

$\sigma_{T_0}^{\psi} = 1$

v) ${}^\exists\varphi \quad \sigma_{T_0}^{\varphi}$: inner

i) ~ v) は同値

証明) 定理1) より次の事は明らかである。

iv) ⇒ i) ⇒ ii) ⇒ v) ⇒ ii)

ii) ⇒ iii) ${}^\forall\varphi$ に対して $\sigma_{T_0}^{\varphi}$ = inner, ${}^\exists u \in M$ s.t $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x) = uxu^*$

φ は $\sigma_{T_0}^{\varphi}$- invariant だから $\varphi(uxu^*) = \varphi(x) \quad {}^\forall x \in M_+$

$\therefore \eta_\varphi u \subset \eta_\varphi \quad \eta_\varphi u^* \subset \eta_\varphi$

$\therefore u\mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi \quad \mathfrak{M}_\varphi u \subset \mathfrak{M}_\varphi$,

${}^\forall x \in \mathfrak{M}_\varphi \quad \varphi(ux) = \varphi(xu)$

[1] により $u \in M_\varphi$ & $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x) = uxu^* = x \quad {}^\forall x \in M_\varphi$

より, $u \in$ center of M_φ

iii) ⇒ iv) u = implement $\sigma_{T_0}^{\varphi}$

h: center of M_φ, $h \geq 0$

$u = h^{-iT_0}$

$$\psi \overset{\text{def}}{=} \varphi(h\,\cdot\,)$$

Lemma 1 より $\sigma_t^{\psi}(x) = h^{it}\sigma_t^{\varphi}(x)h^{-it}$

$$\therefore\ \sigma_{T_0}^{\psi}(x) = x.$$

今まで知られているKallman [3], Takesaki [2] 等の結果を使って次の様な事がわかる。

<u>定理4</u> i) M : semi-finite $\Longrightarrow T(M) = R$

ii) 特に M_* : separable ならば

M : semi-finite $\Longleftrightarrow T(M) = R$

§4

以下では具体的なMに関して$T(M)$を計算する。

I) $M = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty}(M_\nu, \varphi_\nu)$ M_ν : factor φ_ν : state

= <u>定理5</u> $T_0 \in T(M) \Longleftrightarrow$ i) $\bigcap T(M_\nu) \ni T_0$

ii) $\sigma_{T_0}^{\varphi_\nu}(x) = u_\nu x u_\nu^*$

$\Longrightarrow \sum 1 - |\varphi_\nu(u_\nu)| < \infty$

証明 ($\Rightarrow$) まずKallman [B4] の結果を述べておく。

$\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2$: $M_1 \otimes M_2$: automorphism : inner $\Longleftrightarrow$ α_i : inner $i=1,2$.

GNS construction により $\varphi_\nu(x) = (x\Omega_\nu, \Omega_\nu)$ として

以下では $M = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty}(M_\nu, \Omega_\nu)$ について論じる。$\psi = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu$ とすると

$\sigma_t^{\psi}(x) = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty}\sigma_t^{\varphi_\nu}$ なる事とKallmannの結果を使うと

$T_0 \in T(M) \Longrightarrow T_0 \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} T(M_\nu)$ は明らかである。

ii) u : implement $T_{T_0}^{\varphi}$

$\{\prod_{\nu\in J}\otimes x_\nu\Omega_\nu \otimes \prod_{\nu\notin J}\otimes\Omega_\nu : J$: finite set, $x_\nu\in M_\nu\}$: dense in $\prod_\nu(\mathfrak{H}_\nu, \Omega_\nu)$

$^\exists J_0$: finite set $\quad C = |(u\bigotimes_{\nu}\Omega_\nu, \prod_{\nu\in J_0}\otimes x_\nu\Omega_\nu\otimes(\prod_{\nu\notin J_0}\Omega_\nu))| \neq 0 \cdots (1)$

$J_0 \subset {}^\forall J$ = finite $\qquad T_{T_0}^{\varphi} = \prod_{\nu\in J}\otimes T_{T_0}^{\varphi_\nu}\otimes\prod_{\nu\notin J}\otimes T_{T_0}^{\varphi_\nu}$

Kallman の結果により、$^\exists u_\nu$: implement $T_{T_0}^{\varphi_\nu}$ $\quad \nu\in J$

V_J : implement $\otimes\prod_{\nu\notin J}\otimes T_{T_0}^{\varphi_\nu}$、又、$M$ が factor なる事

より $^\exists\lambda_J\in\mathbb{C}$, $u = {}^\forall\lambda_J(\prod_{\nu\in J}\otimes u_\nu)\otimes V_J$

(1) より $0 < C = \prod_{\nu\in J_0}|(u_\nu\Omega_\nu, x_\nu\Omega_\nu)||(V_J\bigotimes_{\nu\notin J}\Omega_\nu, \Omega_\nu)|\prod_{\nu\in J/J_0}|(u_\nu\Omega_\nu, \Omega_\nu)|$

$|(V_J\bigotimes_{\nu\notin J}\Omega_\nu, \Omega_\nu)| \leq 1$, $\prod_{\nu\in J/J_0}|(u_\nu\Omega_\nu, \Omega_\nu)| \leq 1$ より

$\prod_{\nu\in J/J_0}|(U_\nu\Omega_\nu, \Omega_\nu)|$ converge as $J/J_0\uparrow\infty$

$\therefore \sum 1 - |(U_\nu\Omega_\nu, \Omega_\nu)| = \sum 1 - |\varphi_\nu(u_\nu)| < \infty$

($\Leftarrow$) 明らか $\qquad$ q.e.d

特に M が I.T.P.F.I について上の結果を使うと

$M = \bigotimes_\nu(M_\nu, \Omega_\nu) \qquad Sp(M_\nu, \Omega_\nu) = \{\lambda_{\nu_1} \leq \cdots \leq \lambda_{\nu_n}\}$

$$h_\nu \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_{\nu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\nu_n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi_\nu(x) = (x\Omega_\nu, \Omega_\nu) = T_\nu(hx)$ より $T_t^{\varphi_\nu}(x) = h^{it}xh^{-it}$

$T_0 \in T(M) \iff \sum 1 - |\sum_{i=1}\lambda_{\nu_i}^{1+iT_0}| < \infty$

例 $Sp(M_\nu, \Omega_\nu) = \{p, q\}$ ならば

$T(M) = \{nT_0 : n\in\mathbb{Z}\}$ $\quad \exp(-2\pi/T_0) = \lambda$

G_2 : 2-generator を持つ free group とし $U(G_2)$ を ~~l~~ regular

rep より出来る II_1-factor とする

$T(L(G_2)\otimes M_*) = T(M)$ より

non-hyper-finite III-型-factor が非可算無限個の存在の証明となる

II) μ: σ-finite measure on Ω.

G: bijection, bimeasurable transformation の subgr.

G は Ω に μ に関して free に act しているものとする

$L^\infty(\Omega, \mu) \ni {}^\forall f.\quad s\circ f \overset{\text{def}}{=} f\circ s^{-1} \quad s\in G$

$W^*(G, \Omega) \overset{\text{def}}{=}$ G と $L^\infty(\Omega, \mu)$ の cross product.

定理6 $T_0 \in T(W^*(G, \Omega)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists\nu$: posit. measure on Ω

s.t. $\nu \sim \mu$, $(ds^{-1}\nu/d\nu)(\omega) \in \{\rho^n, n\in \mathbb{Z}\}$ $\rho = \exp(-2\pi/T_0)$

$\forall s\in G \quad \omega\in\Omega$

Proposition 1

N: semi-finite subalgebra of M.

E: $M \longrightarrow N$: normal faithful conditional expectation

$N(E) \overset{\text{def}}{=} \{u : E(uxu^*) = uE(x)u^*,\ {}^\forall x\in M\} \subset M_u$

$C = N' \cap M \subset N$,

G: $N(E)$ の sub group で $M = \{N, G\}''$ とする

τ: trace on N

${}^\forall v \in G \quad {}^\exists f_{v,\tau} \geq 0,\ f_{v,\tau}\,\eta\, C$ s.t. $\tau(vxv^*) = \tau(f_{v,\tau}x)\ {}^\forall x \in N_+$

以下の i)〜iii) は同値

i) $T_0 \in T(M)$

ii) $\forall \tau$: trace , $\exists V \in \mathcal{C}_u$ s.t. $\forall u \in \mathfrak{G}$ $u^* V u V^* = \rho_{u,\tau}^{iT_0}$

iii) $\exists \tau$ = trace , s.t. $\rho_{u,\tau}^{iT_0} = 1$ $\forall u \in \mathfrak{G}$.

証明略.

Proposition 2. [Zeller Meier [7]]

$\mathfrak{A}$: Neumann algebra

$\mathfrak{G}$: discrete group of automorphisms on $\mathfrak{A}$.

$M = W^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ - ($\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{A}$ の cross product)

i) $I : a \longrightarrow (I(a))_{t,u} = \delta_t^u \, t^{-1} a \in M$

$I : \mathfrak{A} \longrightarrow I(\mathfrak{A}) = N \subset M$: isomorphism

ii) $E : a \in M \longrightarrow (I(a_{e,e}))$: normal faith. conditional expectation on N

iii) $\forall s \in \mathfrak{G} \xrightarrow{U_s} U_s \in M$. $(U_s)_{t,u} \overset{\mathrm{def}}{=} \delta_t^{su}$: isomorphism.

$M(E) \supset \{U_s : s \in \mathfrak{G}\} = \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G} \Rightarrow$ $M = \{N, \mathfrak{G}\}''$

iv) $s \in \mathfrak{G}$ $x \in \mathfrak{A}$. $U_s I(x) U_s^* = I(s \cdot x)$

証明略

定理の証明

$\forall \tau$: trace on $N = I(L^\infty(\Omega, \mu))$ に対して

$\exists \nu$: measure on Ω s.t. $\nu \sim \mu$

$\tau_\nu(I(f)) = \int f(\omega) \, d\nu(\omega)$ $\forall f \in L^\infty(\Omega, \mu)_+$

$\forall x \in N_+$, $\forall s \in \mathfrak{G}$ に対して. $\tau_\nu(U_s I(x) U_s^*) = \tau_{s^{-1}\nu}(I(x)) = \int x(\omega) \, d(s^{-1}\nu)(\omega)$

したがって. Proposition 2) iii) により.

$\exists\, \tau$: trace on N. s.t $\rho_{s,\nu}^{\tau_0}(\omega) = 1$

$\setminus\ \tau(U_s \Pi(X) U_s^*) = \int X(\omega)\, d(s^{-1}\nu)(\omega) = \int \rho_{s,\nu}(\omega) X(\omega)\, d\nu(\omega) \qquad \forall X \in L^\infty(\Omega,\mu)_+$

$\rho_{s,\nu}(\omega) = \left[\frac{ds^{-1}\nu}{d\nu}\right](\omega)$ q.e.d.

Reference

[1] Takesaki - Pederson: The Radon-Nikodym-theorem for Von Neumanns algebras (To appear)

[2] Takesaki : Tomita's theory and its application.

[3] Kallman : Groups of inner automorphism of Von Neuman algebras. Jour. of fun. Analysis '71'

[4] Kallman : A generalisation of free action. Duke. Math. J. 36, 1969.

[5] A. Connes : Doctor thesis.

[6] A. Connes Groupe modulaire d'une algebras de von Neumann. C.R. Acad Sci '72

[7] G. Zeller Meier : Produit croisé d'une C^*-algebra par un groupe d'automorphisms. J Math pure et appl '68